ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2025-2026

Série 9: Bases, coordonnées et représentations matricielles d'applications linéaires

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) **utiliser les matrices de passage** pour **calculer les coordonnées** d'un vecteur ;

(O.2) **utiliser les représentations matricielles** des applications linéaire relatives à des bases, ainsi que leur **lien avec les matrices de passage pour calculer des représentations relatives à des bases différentes**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- matrice de passage (ou de changement de base)
- représentation matricielle d'une application linéaire relative à deux bases

Noyau d'exercices

1.1 Bases

Exercice 1 (Extraction d'une base)
Soit

$$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A^{\mathrm{T}} = A\}$$

le sous-espace vectoriel des matrices symétriques dans l'espace vectorielde matrices carrées de taille 2×2. Montrer que la famille

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$$

engendre $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ et extraire une base, *i.e.* trouver une base $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ de $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$.

1.2 Coordonnées de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

Exercice 2 (Coordonnées dans $\mathbb{P}_2$, I)
On considère les deux bases (ordonnées)

$$\mathscr{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\} \text{ et } \mathscr{B} = \{1-2t+t^2, 3-5t+4t^2, 2t+3t^2\}.$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

(a) Déterminer la matrice $P_{\mathscr{B}_{\text{can}}\leftarrow\mathscr{B}}$ de changement de base de la base $\mathscr{B}$ vers la base canonique $\mathscr{B}_{\text{can}}$.
(b) Déterminer le vecteur $[p]_{\mathscr{B}} \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées du polynôme $-1+2t \in \mathbb{P}_2$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3 (Coordonnées dans $\mathbb{R}^3$)
On considère la base (ordonnée)

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ l'unique vecteur tel que

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le vecteur $\mathbf{x}$ (qui coïncide avec $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$, où $\mathscr{B}_{\text{can}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.)
(b) Calculer $[\mathbf{y}]_{\mathscr{B}}$ pour

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Coordonnées dans $\mathbb{P}_2$, II)
On considère les deux bases (ordonnées)

$$\mathscr{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\} \text{ et } \mathscr{B} = \{1+t^2, 1-3t^2, 1+t-3t^2\}.$$

de l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

(a) Soit $p \in \mathbb{P}_2$ l'unique polynôme tel que

$$[p]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $[p]_{\mathscr{B}_{\text{can}}}$
   (i) en développant $[p]_{\mathscr{B}}$ dans $\mathbb{P}_2$;
   (ii) en utilisant l'identité $[p]_{\mathscr{B}_{\text{can}}} = P_{\mathscr{B}_{\text{can}}\leftarrow\mathscr{B}}[p]_{\mathscr{B}}$;
   (iii) en résolvant l'équation matricielle $P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}_{\text{can}}}[p]_{\mathscr{B}_{\text{can}}} = [p]_{\mathscr{B}}$.
(b) Soit $q = -2+5t-2t^2 \in \mathbb{P}_2$. Calculer $[q]_{\mathscr{B}}$
   (i) en développant $[q]_{\mathscr{B}}$ dans $\mathbb{P}_2$;
   (ii) en utilisant l'identité $[q]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}_{\text{can}}}[q]_{\mathscr{B}_{\text{can}}}$;
   (iii) en résolvant l'équation matricielle $P_{\mathscr{B}_{\text{can}}\leftarrow\mathscr{B}}[q]_{\mathscr{B}} = [q]_{\mathscr{B}_{\text{can}}}$.

1.3 Matrices d'applications linéaires

Exercice 5 (Représentation matricielle d'une application linéaire I)
Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Soient $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases $\mathscr{B}_{\text{can}}$ dans l'espace de départ et $\mathscr{B}$ dans l'espace d'arrivée.
(b) Même question pour les bases $\mathscr{B}$ dans l'espace de départ et $\mathscr{B}_{\text{can}}$ dans l'espace d'arrivée.
(c) Même question pour la base $\mathscr{B}$ dans l'espace de départ et d'arrivée.

Exercice 6 (Représentation matricielle d'une application linéaire II)
On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2,$$

pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que T est linéaire.
(b) Trouver la dimension et une base de $\mathsf{Img}(T)$.
(c) Vérifier que le polynôme $7+5t+2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée dans l'item précédent.
(d) Trouver la dimension et une base de $\mathsf{Ker}(T)$.
(e) Vérifier que le polynôme $2-2t-5t^2+5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée dans l'item précédent.

Pour compléter la pratique

2.1 Bases

Exercice 7 (QCM sur indépendance linéaire et bases)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) La famille

$$\mathscr{F} = \left\{ t^2 + t + 1, t^2 + 2t + a, t^3 + b, t + c \right\} \subseteq \mathbb{P}_4$$

- ☐ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ forme une base de $\mathbb{P}_3 \subseteq \mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ est une famille liée de $\mathbb{P}_4$ pour toutes les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ☐ est une famille liée de $\mathbb{P}_4$ pour toutes les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a - c - 1 \neq 0$.

(b) La famille

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

est libre

- ☐ pour toutes les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$;
- ☐ si $a \in \mathbb{R}$ est non nul et pour toute valeur de $b \in \mathbb{R}$;
- ☐ pour toutes les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 3$;
- ☐ pour $b = 3$ et toute valeur de $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Exercice 8 (QCM sur bases et coordonnées)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix},$$

alors

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0 ;
- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0 ;
- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ;
- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

(b) La famille

$$\mathscr{F} = \{\underbrace{t - t^2}_{p}, \underbrace{1 + t^2}_{q}\} \subseteq \mathbb{P}_2$$

- ☐ est une famille libre mais non génératrice de $\mathbb{P}_2$;
- ☐ est une base de $\mathbb{P}_2$;
- ☐ est de cardinalité 1 ;

- [ ] satisfait que $(1+t)q-(1-t)p \in \operatorname{Vect}\mathscr{F}$.

(c) Pour

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 0 \right\}$$

et les vecteurs

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{et } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dans W, alors

- [ ] on peut compléter $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ en une base de W formée de 5 vecteurs ;
- [ ] on peut compléter $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ en une base de W formée de 6 vecteurs ;
- [ ] on peut compléter $\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$ en une base de W formée de 5 vecteurs ;
- [ ] on peut compléter $\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$ en une base de W formée de 6 vecteurs.

(d) Étant donné un espace vectoriel V et une partie $\mathscr{F} \subseteq V$ de cardinalité k, alors

- [ ] si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\dim(V) = k$;
- [ ] si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\dim(V) \geq k$;
- [ ] si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de V, alors $\dim(V) = k$;
- [ ] si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de V, alors $\dim(V) \geq k$.

2.2 Matrices d'applications linéaires

Exercice 9 (Représentation matricielle d'une application linéaire III)
Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, et soit

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

une base (ordonnée) de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$.